

AFSCET

Res-Systemica

Revue Française de Systémique
Fondée par Evelyne Andreewsky

Volume 18, automne 2018

La systématique face à la question du déterminisme

Res-Systemica, volume 18, article 09

Objets géométriques et méthodes tensorielles de Gabriel Kron
Notions élémentaires

Yuri Sohor et Olivier Maurice

14 pages

contribution reçue le 24 septembre 2018



Creative Commons

Objets géométriques & méthodes tensorielles de Gabriel Kron.

Notions élémentaires

Yuri SOHOR*, Olivier MAURICE†¹

¹Chaire ESA, université de Pskov

²AFSCET - Association Française de Science des Systèmes

September 24, 2018

Abstract

L'objet de cet article est d'examiner les interprétations géométriques des équations de l'analyse tensorielle des réseaux dans le but d'une aide à la décision pour les tâches systémiques de génie électrique. Nous présentons des exemples d'interprétations géométriques d'équations issues de schémas électriques.

1 Introduction

L'approche recherchée dans l'usage de l'analyse tensorielle des réseaux est de disposer d'une technique à même de permettre l'analyse de problèmes multiphysiques et multiéchelles. Les formulations issues des relations du génie électrique se retrouvent unifiées et présentées sous une forme très compacte. Cette unification permet d'écrire les équations sous une forme adéquate pour être ensuite déclinée vers une application numérique. Les expressions actuelles employées dans le génie électrique se sont spécialisées et se sont écartées de fondements mathématiques qui les engendrent. L'analyse tensorielle des réseaux et la diakoptique de G.Kron sont une voie pour réécrire ces fondements du génie électrique. Dans ce cadre nous examinons la formulation des équations fondamentales du génie électrique sous un regard de géomètre en usant de l'algèbre tensorielle.

2 Description d'objets géométriques pour les études de schémas linéaires

2.1 Conventions d'écriture

Examinons l'exemple de schéma électrique présenté fig.1.

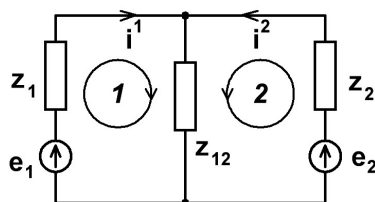


Figure 1: Exemple de réseau à deux mailles.

Les équations associées à ce schéma relient les courants de mailles i^n et les forces électromotrices (fém) de mailles e_m :

$$e_m = z_{mn}i^n \quad (1)$$

*dia-connect@hotmail.com

†olivier.maurice@gmail.com

Nous convenons que les indices supérieurs pointent des objets contravariants, alors que les indices inférieurs pointent les objets covariants. Si nécessaire, des parenthèses permettent de noter de façon abstraite les coordonnées fixées d'un point et ne sont pas un ensemble de composantes sur lequel peut s'appliquer un produit contracté. Si nous désirons élever au carré un objet, nous plaçons de même son symbole entre parenthèses.

Nous introduisons le système de coordonnées naturelles (O, i^m) pour les courants de mailles et de coordonnées duales pour les fém de mailles (O, e_m) . Le point de fonctionnement du schéma est X , ou encore le vecteur naturel des courants \vec{X} . Les composantes I^m de ce vecteur dans le système de coordonnées naturelles sont mesurées comme des pondérations de vecteurs de base \vec{a}_m . Les composantes E_m du vecteur \vec{X} dans le système de coordonnées duales sont de même mesurées comme des pondérations d'une base duale \vec{a}^m . Soit pour résumer, en exploitant la convention du produit contracté d'Einstein :

$$\begin{cases} \vec{X} = \vec{a}_m i^m & \rightarrow & I^n = a_m^n i^m \\ \vec{X} = \vec{a}^m e_m & \rightarrow & E_n = a_n^m e_m \end{cases} \quad (2)$$

i^m sont les coordonnées naturelles du vecteur \vec{X} alors que les e_m sont ses coordonnées duales. D'une manière générale, les vecteurs de base sont décrits par l'ensemble des composantes $\vec{a}_m = (a_m^1, a_m^2, \dots, a_m^n)$. Dans l'exemple donné $a_m^n \neq 0$ sauf à ce que la condition $m = n = k$ soit vérifiée, càd $\vec{a}_k = (0, \dots, a_k, \dots, 0)$, $\vec{a}^k = (0, \dots, a^k, \dots, 0)$.

Entre les deux espaces naturel et dual, une métrique z relie les composantes des deux expressions du vecteur \vec{X} dans ces deux espaces. Cette métrique correspond aux impédances des mailles et son inverse y correspond aux admittances des mailles :

$$\begin{aligned} z_{mn} &= z_{nm} \\ y^{nm} &= (z_{mn})^{-1} \end{aligned}$$

La convention d'écriture de l'algèbre tensorielle assure la redondance des indices impliqués dans le produit contracté, de la forme $a_k b^k$ ou encore $g_{km} b^m$ de même que l'inversion des indices lors de l'inversion : $a_k = g_{km} b^m \Rightarrow b^m = q^{mk} a_k$, $q = g^{-1}$.

2.2 Système de coordonnées naturelles

2.2.1 Notions élémentaires

Nous rappelons ici les relations fondamentales attachées à l'espace des coordonnées naturelles.

Le vecteur \vec{X} étant défini par $\vec{X} = \vec{a}_m i^m$, nous pouvons calculer le carré de sa longueur :

$$|\vec{X}|^2 = (\vec{a}_m i^m) \cdot (\vec{a}_n i^n) = (\vec{a}_m \cdot \vec{a}_n) i^m i^n$$

Puisque le tenseur métrique s'exprime par définition à partir des vecteurs de base [1] :

$$z_{mn} = (\vec{a}_m \cdot \vec{a}_n) \quad (3)$$

alors, le carré de la longueur du vecteur \vec{X} s'exprime par :

$$|\vec{X}|^2 = z_{mn} i^m i^n \quad (4)$$

Par exemple, dans le cas de l'espace décrit par le schéma figure 1, en tenant compte du fait que $z_{12} = z_{21}$, nous avons :

$$|\vec{X}|^2 = z_{11} (i^1)^2 + 2z_{12} i^1 i^2 + z_{22} (i^2)^2$$

Conformément à (3), les composantes séparées de z_{mn} sont calculées comme suit [1] :

$$z_{mn} = \begin{array}{c} \mathbf{m} \backslash \mathbf{n} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \left(\begin{array}{cc} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{m} \backslash \mathbf{n} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \left(\begin{array}{cc} (a_1)^2 & a_1 a_2 \cos(\theta_{12}) \\ a_2 a_1 \cos(\theta_{12}) & (a_2)^2 \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{m} \backslash \mathbf{n} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{array} \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \left(\begin{array}{cc} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{array} \right) \end{array} \quad (5)$$

A la vue de ces expressions et organisations matricielles, nous comprenons que les longueurs des vecteurs de base sont données par

$$|a_{(m)}| = \sqrt{z_{mm}} \quad (6)$$

et les coefficients de la métrique peuvent être obtenus à partir de la formule :

$$z_{mn} = \sqrt{z_{mm}}\sqrt{z_{nn}}\cos(\theta_{mn}) \quad (7)$$

où θ_{mn} est l'angle entre les axes a_m et a_n du système de coordonnées naturelles.

Selon (7), cet angle peut être calculé à partir de la relation :

$$\theta_{mn} = \arccos\left(\frac{z_{mn}}{\sqrt{z_{mm}}\sqrt{z_{nn}}}\right) \quad (8)$$

Avec les relations précédentes et l'exemple présenté figure 1, nous pouvons établir en illustration la métrique suivante :

$$z_{mn} = \begin{matrix} \mathbf{m} \backslash \mathbf{n} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & z_{11} & \sqrt{z_{11}}\sqrt{z_{22}}\cos(\theta_{12}) \\ \mathbf{2} & \sqrt{z_{22}}\sqrt{z_{11}}\cos(\theta_{12}) & z_{22} \end{matrix} \quad (9)$$

Pour calculer les longueurs des projections du vecteur \vec{X} , nous pouvons utiliser la relation suivante au lieu de celle présentée équation (2) :

$$I^m = \sqrt{z_{mm}} i^m \quad (10)$$

2.2.2 Exemple de calcul

Imaginons un circuit chiffré, défini par sa métrique :

$$z_{mn} = \begin{matrix} \mathbf{m} \backslash \mathbf{n} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & z_{11} & z_{12} \\ \mathbf{2} & z_{21} & z_{22} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathbf{m} \backslash \mathbf{n} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & 0.6 & 0.547 \\ \mathbf{2} & 0.547 & 1.32 \end{matrix}$$

Nous fixons également les courants de mailles

$$i^m = \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.34 \\ 0.722 \end{pmatrix}$$

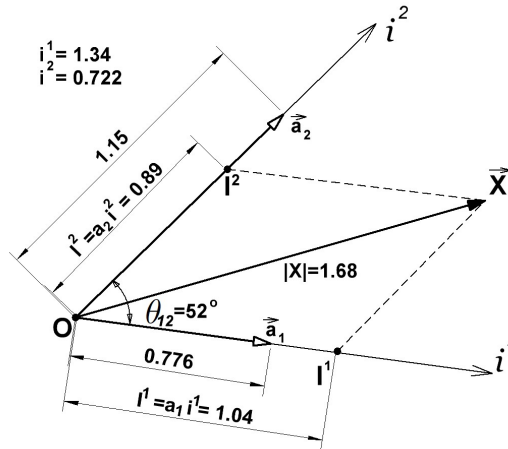


Figure 2: Représentation du vecteur \vec{X} dans le système de coordonnées naturelles

Nous calculons, en appliquant les relations établies précédemment :

- Les longueurs des vecteurs de base (6): $a_1 = \sqrt{z_{11}} = \sqrt{0.6} = 0.776$, $a_2 = \sqrt{z_{22}} = \sqrt{1.32} = 1.15$

- L'angle entre les axes des coordonnées (8): $\Theta_{12} = \arccos\left(\frac{z_{12}}{\sqrt{z_{11}}\sqrt{z_{22}}}\right) \frac{180}{\pi} = \arccos\left(\frac{0.547}{\sqrt{0.6}\sqrt{1.32}}\right) \frac{180}{\pi} = 52^\circ$
- Les longueurs des composantes du vecteur courant (2): $I^1 = a_{(1)} i^1 = 0.776 \cdot 1.34 = 1.04$, $I^2 = a_{(2)} i^2 = 1.15 \cdot 0.772 = 0.89$
- La longueur du vecteur courant (4) :

$$|X| = \sqrt{z_{11}(i^1)^2 + 2z_{12}i^1i^2 + z_{22}(i^2)^2} = \sqrt{0.6(1.34)^2 + 2 \cdot 0.547 \cdot 1.34 \cdot 0.772 + 1.32(0.772)^2} = 1.68$$

Ces quantités sont reportées sur la figure illustrative 2.

2.3 Système de coordonnées duales

2.3.1 Notions élémentaires

Nous précisons à nouveau les notations :

- Le système des coordonnées associées aux f.é.m des mailles (O, e_m) correspond au système des coordonnées duales ;
- Les longueurs E_m correspondent aux longueurs des projections du vecteur \vec{X} sur les coordonnées duales (O, e_m) ;
- les f.é.m des mailles e_m correspondent aux coordonnées du vecteur \vec{X} dans l'espace dual ;
- Les conductances de mailles y^{mn} correspondent aux composantes de l'inverse du tenseur métrique z_{mn} .

Le schéma électrique est représenté théoriquement par l'équation tensorielle reliant les courants de mailles aux f.é.m de mailles :

$$e_m = z_{mn} i^n$$

Nous examinons plus loin la construction du système de coordonnées duales.

Les vecteurs de base duaux, sont construits à partir de la relation fondamentale :

$$\vec{a}_m \vec{a}^n = \delta_m^n$$

Pour deux axes de coordonnées, cela signifie par exemple que $\vec{a}_1 \perp \vec{a}^2$ ou $\vec{a}_2 \perp \vec{a}^1$.

Calculons les coordonnées du vecteur \vec{X} dans le système dual. Nous avons déjà signalé la relation entre le tenseur métrique de l'espace naturel et le tenseur y , métrique de l'espace dual. Nous en déduisons les longueurs des vecteurs de base du système dual :

$$a^{(m)} = \sqrt{y^{mm}} \quad (11)$$

Les longueurs E_m des projections du vecteur \vec{X} sur les axes des coordonnées du système dual sont alors données par :

$$E_m = a^{(m)} e_m \quad (12)$$

et les angles entre les axes du système dual définis par :

$$\theta^{mn} = \arccos\left(\frac{y^{mn}}{\sqrt{y^{mm}}\sqrt{y^{nn}}}\right) \quad (13)$$

Le vecteur \vec{X} peut être représenté dans deux systèmes de coordonnées : le système naturel (O, i^m) et le système dual (O, e_m) . Autrement écrit :

$$\vec{X} = \vec{a}_m i^m = \vec{a}^m e_m$$

$$|\vec{X}|^2 = z_{mn} i^m i^n = y^{mn} e_m e_n$$

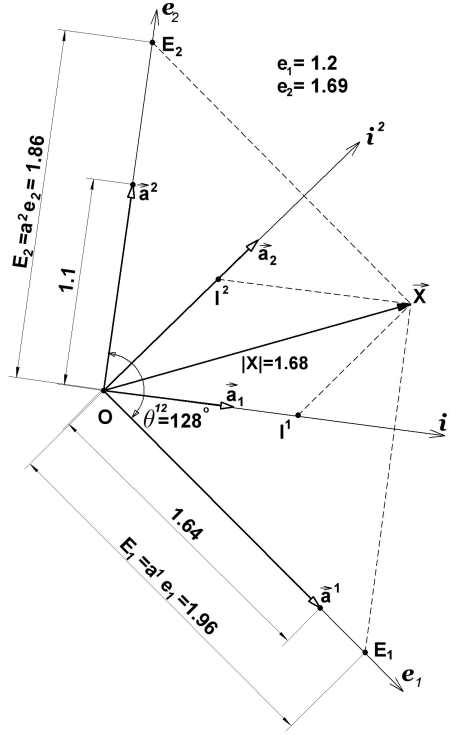


Figure 3: Résultats du calcul des composantes du vecteur \vec{X} sur la base duale. Au même lieu, nous dessinons la base naturelle.

2.3.2 Exemple de calcul dans l'espace dual

Calculons les composantes du vecteur \vec{X} dans la base duale.

Nous exprimons :

- les coordonnées du vecteur dual :

$$e_m = z_{mn} i^n = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.547 \\ 0.547 & 1.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.34 \\ 0.722 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.69 \end{pmatrix}$$

- le tenseur métrique :

$$y^{mn} = (z_{mn})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.547 \\ 0.547 & 1.32 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.68 & -1.11 \\ -1.11 & 1.22 \end{pmatrix}$$

- les longueurs des vecteurs de base duale : $a^1 = \sqrt{y^{11}} = \sqrt{2.68} = 1.64$, $a^2 = \sqrt{y^{22}} = \sqrt{1.22} = 1.1$
- l'angle entre les axes des coordonnées (13): $\Theta^{12} = \arccos\left(\frac{y^{12}}{\sqrt{y^{11}}\sqrt{y^{22}}}\right) \frac{180}{\pi} = \arccos\left(\frac{-1.11}{\sqrt{2.68}\sqrt{1.22}}\right) \frac{180}{\pi} = 128^\circ$
- les longueurs des composantes des f.é.m. (12): $E_1 = a^{(1)} e_1 = 1.64 \cdot 1.2 = 1.96$, $E_2 = a^{(2)} e_2 = 1.1 \cdot 1.69 = 1.86$
- la longueur du vecteur \vec{X} :

$$|\vec{X}| = \sqrt{y^{11}(e_1)^2 + 2y^{12}e_1e_2 + y^{22}(e_2)^2} = \sqrt{2.68(1.2)^2 + 2 \cdot (-1.11) \cdot 1.2 \cdot 1.69 + 1.22(1.69)^2} = 1.68$$

Les résultats du calcul des composantes du vecteur \vec{X} sur la base duale sont dessinées sur la figure 3. Au même lieu, pour la comparaison, sont dessinées les composantes du même vecteur sur la base naturelle.

2.4 Analyse

Les courants et f.é.m. de mailles correspondent aux projections du vecteur \vec{X} associé aux courants du schéma figure 1 sur les coordonnées naturelles ou duales :

$$\vec{X} = \vec{a}_m i^m = \vec{a}^m e_m$$

La longueur de ce vecteur traduit la puissance stockée ou dissipée dans le circuit :

$$\left| \vec{X} \right|^2 = z_{mn} i^m i^n = y^{mn} e_m e_n$$

La particularité de l'espace des mailles est d'annuler les différences de potentiels U (d.d.p.). Nous établissons un changement de base décrivant les mailles et reliant par une connectivité C courants de mailles et de branches, en partant de l'équation de Kirchhoff dans l'espace des branches:

$$e_n = z_{nm} i^m + U_n$$

avec $i^m = C_\alpha^m i^\alpha$, nous remplaçons pour obtenir :

$$e_n = z_{nm} C_\alpha^m i^\alpha + U_n \Rightarrow C_\sigma^n e_n = C_\sigma^n z_{nm} C_\alpha^m i^\alpha + C_\sigma^n U_n$$

Mais par définition de la loi des mailles, $C_\sigma^n U_n = 0$. Il reste alors avec $C_\sigma^n e_n = e_\sigma$ f.é.m. dans l'espace des mailles, $C_\sigma^n z_{nm} C_\alpha^m = z_{\sigma\alpha}$ métrique dans l'espace des mailles

$$e_\sigma = z_{\sigma\alpha} i^\alpha$$

L'expression de l'équation du circuit dans l'espace des nœuds, encore dit espace nodal (l'espace des mailles a été proposé comme "espace modal" [5]), engendre une équation plus compliquée. En partant de l'incidence A , qui relie potentiels aux nœuds ψ et d.d.p. U : $U_n = A_n^k \psi_k$, nous partons de l'équation de bilan des courants aux nœuds des branches:

$$y^{mn} e_n + I^m = y^{mn} U_n \Rightarrow y^{mn} e_n + I^m = y^{mn} A_n^k \psi_k$$

En multipliant chaque membre comme précédemment avec la connectivité, par l'incidence transposée, nous trouvons :

$$A_m^g y^{mn} e_n + A_m^g I^m = \left(A_m^g y^{mn} A_n^k \right) \psi_k$$

$Y^{gk} = A_m^g y^{mn} A_n^k$ est la métrique dans l'espace des nœuds. $I^g = A_m^g I^m$ les sources de courants de nœuds et $Q^g = A_m^g y^{mn} e_n$ les sources de courants issues des f.é.m., l'équation nodale exprime les liens entre potentiels aux nœuds et admittance de nœuds :

$$\psi_k = \left[Y^{gk} \right]^{-1} (Q^g + I^g) \quad (14)$$

L'équation nodale ici exprimée dans l'espace dual (espace d'intérêt en formulation nodale) s'avère plus compliquée que son homologue dans l'espace modal. Elle fait appel à une première métrique, issue de l'inversion de z , puis à sa transformation vers l'espace des nœuds. Une fois cette équation établie, des analyses géométriques similaires peuvent être conduites.

Il faut remarquer que dans ses travaux, G.Kron n'a pas étudié l'espace dual. Il a même exprimé l'espace des paires de nœuds qui permet de projeter les sources de courants dans l'espace naturel des courants de mailles, donnant ainsi à cet espace modal des capacités identiques à l'espace nodal mais en profitant de l'élégance de l'expression des équations plus compactes dans l'espace des mailles.

La condition pour pouvoir assimiler z à une métrique dans le cadre des espaces riemanien [2] est que z doit être linéaire et symétrique. Pour étendre l'approche à des opérateurs non linéaires, sous condition de conserver leur dérivabilité, est de raccrocher les équations de Kron aux équations de la géométrie différentielle.

3 Objets géométriques pour l'étude des schémas non linéaires

La géométrisation des schémas non linéaires sur la base de l'analyse tensorielle des réseaux établie par G.Kron est proposée et examinée dans les articles [3],[4],[5].

3.1 Construction du système des coordonnées curvilignes

3.1.1 Équations initiales.

Nous présentons en illustration d'une schéma non linéaire la figure 4.

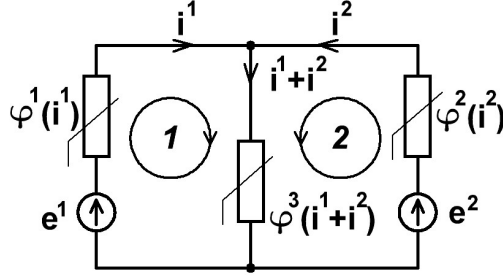


Figure 4: Exemple du schéma non linéaire comprenant deux mailles

Sur la figure 4, les tensions φ aux bornes des résistances dépendent des courants. En posant les équations par la méthode des courants de mailles nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} e_1 &= \varphi^1(i^1) + \varphi^3(i^1 + i^2) \\ e_2 &= \varphi^3(i^1 + i^2) + \varphi^2(i^2) \end{aligned} \quad (15)$$

où φ^n est une fonction du courant associé à la n^{eme} branche.

D'une manière générale nous pouvons écrire:

$$e_m = f^m(i^1, i^2, \dots, i^m) \quad (16)$$

Nous pouvons considérer par exemple que des résistances non linéaires aient une dépendance en puissance cubique du courant $\varphi(i) = k \cdot (i)^3$. Alors dans notre cas (15), le système (16) devient :

$$\begin{aligned} e_1 &= f^1(i^1, i^2) = k_{11}(i^1)^3 + k_{12}(i^1 + i^2)^3 \\ e_2 &= f^2(i^1, i^2) = k_{21}(i^1 + i^2)^3 + k_{22}(i^2)^3 \end{aligned} \quad (17)$$

où les coefficients k_{mm} peuvent être pris égaux à 1 pour simplifier.

3.1.2 Système de coordonnées

Examinons seulement la partie droite de l'équation (16). Donnons des coordonnées cartésiennes f^m de dimension m et exprimons ces coordonnées en fonction de paramètres que sont les courants mailles i^m ; c'est-à-dire que nous créons un vecteur de fonctions paramétrées dans le système cartésien des coordonnées :

$$f^m = \begin{pmatrix} f^1(i^1, i^2) \\ f^2(i^1, i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i^1 + i^2)^3 + (i^1)^3 \\ (i^1 + i^2)^3 + (i^2)^3 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

où les courants de mailles i^m sont les paramètres. Si dans les équations (16) nous fixons $(m-1)$ - paramètres, les coordonnées f^m deviennent des fonctions d'un seul paramètre. Les équations (16) définissent alors une courbe paramétrisée. Dans le cas général, nous aurons m courbes, qui définissent le système curviligne de coordonnées passant par le point O_s avec les coordonnées fixées, que nous désignerons par $(F_{(s)}^1, \dots, F_{(s)}^m)$. Ces coordonnées peuvent être trouvées à partir de $F^m = f^m(I^1, I^2, \dots, I^m)$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} f^{m1} &= f^m(i^1, I_{(s)}^2, \dots, I_{(s)}^m) \text{ — courbe } i^1 \\ f^{m2} &= f^m(I_{(s)}^1, i^2, \dots, I_{(s)}^m) \text{ — courbe } i^2 \\ &\dots \\ f^{mm} &= f^m(I_{(s)}^1, I_{(s)}^2, \dots, i^m) \text{ — courbe } i^m \end{aligned} \quad (19)$$

3.1.3 Exemple de construction.

Construisons un système de coordonnées curvilignes pour deux régimes de l'exemple examiné, disposé sur une certaine trajectoire $f^2 = \phi(f^1)$ Puisque le nombre des coordonnées $m = 2$ est double, deux courbes passent par le point O_s pour ce régime.

- Soit un centre du système de coordonnées *du premier régime*, défini par le point O_1 avec les coordonnées $f^1 = F^1_{(1)} = 2.0$, $f^2 = F^2_{(1)} = -5.0$.

La première courbe fixant $I^2_{(1)} = 1.28$, est définie par le paramètre i^1 :

$$\begin{aligned} f^1 &= (i^1)^3 + (i^1 + 1.28)^3 \\ f^2 &= (i^1 + 1.28)^3 + (1.28)^3 \end{aligned}$$

La seconde courbe fixant $I^1_{(1)} = -1.7$, est définie par le paramètre i^2 :

$$\begin{aligned} f^1 &= (-1.7)^3 + (-1.7 + i^2)^3 \\ f^2 &= (-1.7 + i^2)^3 + (i^2)^3 \end{aligned}$$

- Le centre du système de coordonnées *du deuxième régime*, défini par le point O_2 avec les coordonnées $f^1 = F^1_{(2)} = 5.0$, $f^2 = F^2_{(2)} = -2.0$.

La première courbe fixant $I^2_{(2)} = -1.7$ est définie par le paramètre i^1 :

$$\begin{aligned} f^1 &= (i^1)^3 + (i^1 - 1.7)^3 \\ f^2 &= (i^1 - 1.7)^3 + (-1.7)^3 \end{aligned}$$

La seconde courbe fixant $I^1_{(2)} = 1.28$ est définie par le paramètre i^2 :

$$\begin{aligned} f^1 &= (1.28)^3 + (1.28 + i^2)^3 \\ f^2 &= (1.28 + i^2)^3 + (i^2)^3 \end{aligned}$$

Sur figure 5 nous montrons les résultats de la construction des coordonnées curvilignes. Comme nous pouvons

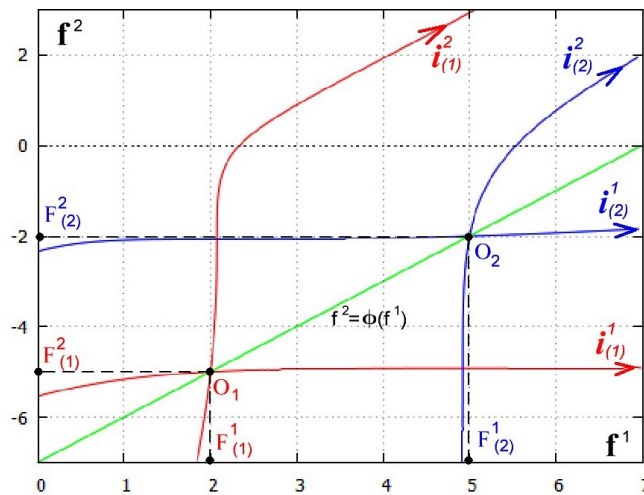


Figure 5: Les coordonnées curvilignes $O_s i^m_{(s)}$ sont déformées lors du mouvement du point O_1 au point O_2 .

le constater sur cette figure 5, lors du changement de coordonnées f^m , les coordonnées du centre O_s changent également. Les coordonnées curvilignes $(O_s, i^m_{(s)})$ sont déformées lors du passage le long de la trajectoire $f^2 = \phi(f^1)$

3.2 Tenseur métrique du système de coordonnées curvilignes

3.2.1 Notions élémentaires

Pour définir une métrique, nous attachons en chaque point O_s un plan tangent qui définit un système local de coordonnées. Ce système évolue d'un point à l'autre et nous pouvons le caractériser en comprenant la nature de la distance dr entre un point F et un point voisin : O_s . Le vecteur \vec{F} joint ces deux points et la nature de l'espace global peut être évaluée en étudiant les accroissements df^m associés aux déplacements de O_s à F , et définis par la différenciation (18) :

$$df^m = \left(\frac{\partial f^m}{\partial i^n} \right)_{O_s} di^n = \alpha_n^m di^n, \quad (20)$$

où

$$\left(\frac{\partial f^m}{\partial i^n} \right)_{O_s} = \alpha_n^m \quad (21)$$

Pour l'exemple examiné:

$$\begin{aligned} df^1 &= \left(\frac{\partial f^1}{\partial i^1} \right)_{O_s} di^1 + \left(\frac{\partial f^1}{\partial i^2} \right)_{O_s} di^2 = \alpha_1^1 di^1 + \alpha_2^1 di^2 \\ df^2 &= \left(\frac{\partial f^2}{\partial i^1} \right)_{O_s} di^1 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial i^2} \right)_{O_s} di^2 = \alpha_1^2 di^1 + \alpha_2^2 di^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le carré de la distance: $(dr)^2$:

$$(dr)^2 = (df^m)^2 = \alpha_n^m \alpha_p^m di^n di^p = g_{np} di^n di^p \quad (22)$$

où

$$g_{np} = \alpha_n^m \alpha_p^m \quad (23)$$

L'objet g_{np} est la métrique du système de coordonnées curvilignes. Dans le cas de notre exemple :

$$\begin{aligned} g_{11} &= \alpha_1^1 \alpha_1^1 + \alpha_1^2 \alpha_1^2, \\ g_{12} &= \alpha_1^1 \alpha_2^1 + \alpha_1^2 \alpha_2^2, \\ g_{21} &= \alpha_2^1 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \alpha_1^2, \\ g_{22} &= \alpha_2^1 \alpha_2^1 + \alpha_2^2 \alpha_2^2, \end{aligned}$$

Nous pouvons de même définir les longueurs des vecteurs de base et la longueur des coordonnées locales. Nous allons examiner la courbe de coordonnée $i_{(s)}^1$ (fig.6), ainsi que les accroissements de cette coordonnée en longueur suivant les axes cartésiens f^1 et f^2 :

$$\begin{cases} df^{11} = \left(\frac{\partial f^1}{\partial i^1} \right)_{O_1} di^1 = \alpha_1^1 di^1 \\ df^{21} = \left(\frac{\partial f^2}{\partial i^1} \right)_{O_1} di^1 = \alpha_1^2 di^1 \end{cases}$$

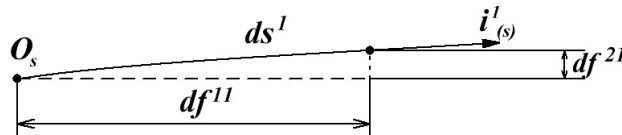


Figure 6: Accroissement ds^1 en longueur pour la courbe de coordonnée $i_{(s)}^1$.

La longueur de cet accroissement est donnée par :

$$ds^1 = \sqrt{(df^{11})^2 + (df^{21})^2} = \sqrt{(\alpha_1^1)^2 + (\alpha_1^2)^2} di^1 = \sqrt{g_{11}} di^1$$

Si nous désignons par dI^m les coordonnées locales obliques du vecteur $d\vec{F}$ et posons que $ds^m \cong dI^m$, pour la courbe de coordonnée $i^1_{(s)}$ nous obtenons :

$$dI^1 = \sqrt{g_{11}} di^1$$

Dans le cas général :

$$dI^m = \sqrt{g_{mm}} di^m \quad (24)$$

Ainsi, les longueurs des vecteurs de base en fonction des longueurs des axes locaux exprimées équation (6) sont données par :

$$a_{(m)} = \sqrt{g_{mm}} = \sqrt{\alpha_m^n \alpha_m^n} \quad (25)$$

et les cosinus directeurs des axes obliques en ce qui concerne les axes cartésiens [1] par :

$$\beta_n^m = \frac{\alpha_n^m}{\sqrt{g_{nn}}}, \quad (26)$$

où m est l'indice de l'axe cartésien, n l'indice de l'axe oblique.

3.2.2 Exemple de construction

Nous présentons le calcul des coefficients métriques pour le point O_1 avec les coordonnées $e^1 = E^1 = 2.0$, $e^2 = E^2 = -5.0$, $i^1 = I^1 = 1.28$, $i^2 = I^2 = -1.7$. Les dérivées sont données par :

$$\begin{cases} \alpha_1^1 = \left(\frac{\partial f^1}{\partial i^1} \right)_{O_1} = 3(I^2 + I^1)^2 + 3(I^1)^2 = 5.426 \\ \alpha_1^2 = \left(\frac{\partial f^2}{\partial i^1} \right)_{O_1} = 3(I^2 + I^1)^2 = 0.5426 \\ \alpha_2^1 = \left(\frac{\partial f^1}{\partial i^2} \right)_{O_1} = 3(I^2 + I^1)^2 = 0.5426 \\ \alpha_2^2 = \left(\frac{\partial f^2}{\partial i^2} \right)_{O_1} = 3(I^2 + I^1)^2 + 3(I^2)^2 = 9.225 \end{cases}$$

Les coefficients métriques sont donnés par :

$$\begin{cases} g_{11} = (\alpha_1^1)^2 + (\alpha_1^2)^2 = 5.426^2 + 0.5426^2 = 29.7, \\ g_{12} = \alpha_1^1 \alpha_2^1 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 5.426 \cdot 0.5426 + 0.5426 \cdot 9.225 = 7.95, \\ g_{21} = \alpha_2^1 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \alpha_1^2 = 0.5426 \cdot 5.426 + 9.225 \cdot 0.5426 = 7.95, \\ g_{22} = (\alpha_2^1)^2 + (\alpha_2^2)^2 = 0.5426^2 + 9.225^2 = 85.4, \end{cases}$$

Les longueurs des vecteurs de base par :

$$\begin{cases} a_{(1)} = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{29.7} = 5.453 \\ a_{(2)} = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{85.4} = 9.24 \end{cases}$$

La disposition des axes obliques et les angles correspondants en ce qui concerne l'axe horizontal cartésien sont montrés sur la figure 7.

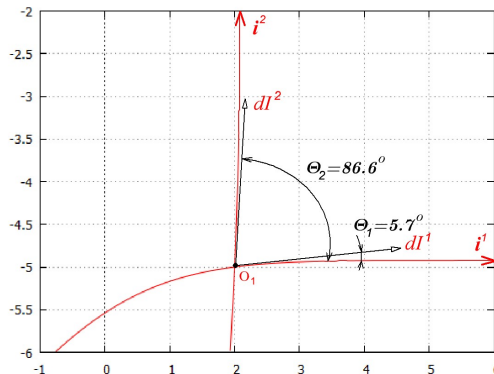


Figure 7: Résultats du calcul de la disposition des coordonnées locales.

Le calcul des cosinus directeurs des axes obliques et des angles correspondants en ce qui concerne l'axe horizontal cartésien est donné selon les formules :

$$\begin{cases} \beta_1^1 = \frac{\alpha_1^1}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{5.426}{5.453} = 0.995; & \Theta_1 = \arccos(0.995) = 5.7^\circ \\ \beta_2^1 = \frac{\alpha_2^1}{\sqrt{g_{22}}} = \frac{0.5426}{9.24} = 0.0995; & \Theta_2 = \arccos(0.0995) = 86.6^\circ \end{cases}$$

Avec l'angle entre les axes obliques :

$$\Theta_{12} = \arccos \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \frac{180}{\pi} = \arccos \frac{7.95}{\sqrt{29.785.4}} \frac{180}{\pi} = 80.9^\circ$$

3.3 Coordonnées curvilignes sur les surfaces

3.3.1 Construction du système de coordonnées curvilignes sur les surfaces

Les principes de la construction du système de coordonnées et du calcul des coefficients métriques sur les surfaces reste le même, identique à celui du système de coordonnées curvilignes. Nous allons démontrer ces constructions appliquées à l'exemple de 2 équations de mailles (17). La construction de la surface en 2 dimensions, via le vecteur de fonctions (18) doit introduire 3 équations :

$$f^3 = f^3(i^1, i^2)$$

Dans le cas général, l'hypersurface à m dimensions peut être construite dans l'espace de $m + 1$ dimensions :

$$f^{m+1} = f^{m+1}(i^1, i^2, \dots, i^m) \quad (27)$$

C'est le moyen paramétrique de description de l'hypersurface [1]. Les paramètres i^m sont les coordonnées curvilignes sur les surfaces. Dans notre exemple nous introduisons la fonction supplémentaire arbitraire $(i^1)^3 + (i^2)^3$:

$$\begin{aligned} f^1 &= (i^1)^3 & + & (i^1 + i^2)^3 \\ f^2 &= (i^1 + i^2)^3 & + & (i^2)^3 \\ f^3 &= (i^1)^3 & + & (i^2)^3 \end{aligned} \quad (28)$$

Fixons un paramètre, par exemple $i^1 = \text{const} = I^1$, pour construire l'équation paramétrique de la courbe $i^1 = \text{const}$, disposée sur les surfaces (28) :

$$\begin{aligned} f^1 &= (I^1)^3 & + & (I^1 + i^2)^3 \\ f^2 &= (I^1 + i^2)^3 & + & (i^2)^3 \\ f^3 &= (I^1)^3 & + & (i^2)^3 \end{aligned}$$

En fixant l'autre paramètre $i^2 = \text{const} = I^2$, nous construisons l'équation paramétrique de la courbe $i^2 = \text{const}$, aussi disposée sur cette surface :

$$\begin{aligned} f^1 &= (i^1)^3 & + & (i^1 + I^2)^3 \\ f^2 &= (i^1 + I^2)^3 & + & (I^2)^3 \\ f^3 &= (i^1)^3 & + & (I^2)^3 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement deux courbes :

$$i^1 = I^1 = \text{const}, \quad i^2 = I^2 = \text{const} \quad (29)$$

qui se croisent au point placé sur la surface de coordonnées $(i^1, i^2) = (I^1, I^2)$. Dans le cas général de l'espace de $m + 1$ dimensions, la coordonnée du point serait (I^1, I^2, \dots, I^m) . Les courbes (29) sont les lignes de coordonnées sur les surfaces. L'ensemble de ces lignes de coordonnées forme le réseau de coordonnées curvilignes. Ainsi, sur les surfaces s'établit le système curviligne de coordonnées (O, i^m) .

Sur figure 8 nous présentons le système de coordonnées curvilignes pour l'exemple proposé. Nous construisons 2 paires de lignes de coordonnées pour les cas suivants :

$$\begin{aligned} I_{(1)}^1 &= 1.28, \quad I_{(1)}^2 = -1.7 \\ I_{(2)}^1 &= 1.7, \quad I_{(2)}^2 = -1.28 \end{aligned}$$

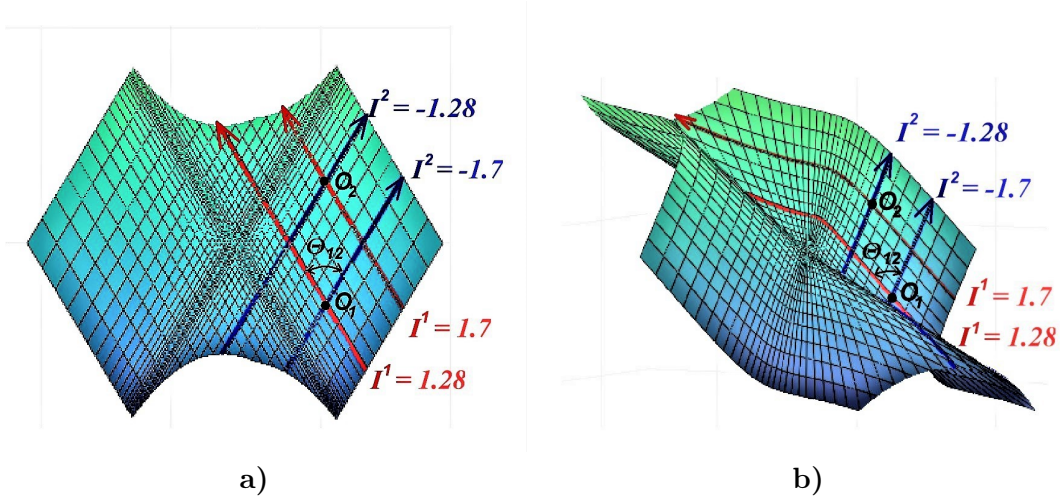


Figure 8: Coordonnées curvilignes sur la surface donnée par les équations (28). Sur les fig. a) et b), la même surface est représentée sous un angle visuel différent.

3.3.2 Métrique sur les surfaces

La métrique sur les surfaces est construite analytiquement à partir de la métrique des coordonnées curvilignes. Pour les équations non linéaires (27), cette dernière est analogue aux équations (21) et (23) au point de la surface O_s . Nous calculons d'abord les composantes des vecteurs de base α_n^m , puis les coefficients métriques g_{np} :

$$\alpha_n^m = \left(\frac{\partial f^m}{\partial i^n} \right)_{O_s}$$

$$g_{np} = \alpha_n^m \alpha_p^m$$

Pour l'exemple proposé :

$$\alpha_1^1 = \left(\frac{\partial f^1}{\partial i^1} \right)_{O_1}, \quad \alpha_1^2 = \left(\frac{\partial f^2}{\partial i^1} \right)_{O_1}, \quad \alpha_1^3 = \left(\frac{\partial f^3}{\partial i^1} \right)_{O_1}$$

$$\alpha_2^1 = \left(\frac{\partial f^1}{\partial i^2} \right)_{O_1}, \quad \alpha_2^2 = \left(\frac{\partial f^2}{\partial i^2} \right)_{O_1}, \quad \alpha_2^3 = \left(\frac{\partial f^3}{\partial i^2} \right)_{O_1}$$

$$g_{11} = \alpha_1^1 \alpha_1^1 + \alpha_1^2 \alpha_1^2 + \alpha_1^3 \alpha_1^3,$$

$$g_{12} = \alpha_1^1 \alpha_2^1 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_1^3 \alpha_2^3,$$

$$g_{21} = \alpha_2^1 \alpha_1^1 + \alpha_2^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^3 \alpha_1^3,$$

$$g_{22} = \alpha_2^1 \alpha_2^1 + \alpha_2^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^3 \alpha_2^3,$$

Nous pouvons introduire les fonctions sous la forme matricielle suivante :

$$f^m = \begin{pmatrix} f^1(i^1, i^2) \\ f^2(i^1, i^2) \\ f^3(i^1, i^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i^1 + i^2)^3 + (i^1)^3 \\ (i^1 + i^2)^3 + (i^2)^3 \\ (i^1)^3 + (i^2)^3 \end{pmatrix}$$

Alors, en différenciant e^m en fonction de i^n , nous obtenons les coefficients α_n^m sous forme matricielle:

$$\alpha_n^m = \left(\frac{\partial f^m}{\partial i^n} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(i^1 + i^2)^2 + 3(i^1)^2 & 3(i^1 + i^2)^2 & 3(i^1)^2 \\ 3(i^1 + i^2)^2 & 3(i^1 + i^2)^2 + 3(i^2)^2 & 3(i^2)^2 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas les coefficients métriques sont calculés aussi sous forme matricielle $g_{np} = \alpha_n^m \alpha_p^m$. Pour notre exemple nous obtenons :

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 \end{pmatrix}$$

Si les coefficients α_n^m sont exprimés en fonction des vecteurs de base :

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_1 &= (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_1^3) \\ \vec{\alpha}_2 &= (\alpha_2^1, \alpha_2^2, \alpha_2^3)\end{aligned}$$

alors les coefficients métriques peuvent être calculés par multiplication scalaire, de façon analogue à l'opération réalisée pour les coordonnées obliques (3) et (5) :

$$g_{mn} = (\vec{\alpha}_m \cdot \vec{\alpha}_n)$$

La matrice $(\vec{\alpha}_m \cdot \vec{\alpha}_n)$ est connue en géométrie différentielle comme étant la matrice de Gram. Dans l'exemple proposé m et n changent de 1 jusqu'à 2 (d'après le nombre de coordonnées sur les surfaces) :

$$(\vec{\alpha}_m \cdot \vec{\alpha}_n) = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 \cdot \vec{\alpha}_2 \end{pmatrix}$$

Dans notre exemple, après certaines transformations algébriques nous obtenons :

$$\begin{aligned}g_{11} &= 54 \left((i^2)^2 + i^1 i^2 + (i^1)^2 \right) \left((i^2)^2 + 3i^1 i^2 + 3(i^1)^2 \right) \\ g_{12} &= 27 \left(3(i^2)^4 + 10i^1 (i^2)^3 + 15(i^1)^2 (i^2)^2 + 10(i^1)^3 i^2 + 3(i^1)^4 \right) \\ g_{21} &= 27 \left(3(i^2)^4 + 10i^1 (i^2)^3 + 15(i^1)^2 (i^2)^2 + 10(i^1)^3 i^2 + 3(i^1)^4 \right) \\ g_{22} &= 54 \left((i^2)^2 + i^1 i^2 + (i^1)^2 \right) \left(3(i^2)^2 + 3i^1 i^2 + (i^1)^2 \right)\end{aligned}$$

Pour le point O_1 avec les valeurs: $i^1 = I^1 = 1.28$, $i^2 = I^2 = -1.7$ nous trouvons :

- Les composantes des vecteurs de base :

$$\alpha_n^m = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.426 & 0.5426 & 4.884 \\ 0.5426 & 9.225 & 8.682 \end{pmatrix}$$

- Les coefficients métriques :

$$\begin{aligned}g_{11} &= 53.587 \\ g_{12} &= g_{21} = 50.348 \\ g_{22} &= 160.76\end{aligned}$$

- L'angle entre les axes obliques selon la formule (8) :

$$\Theta_{12} = \arccos \left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} \right) \frac{180}{\pi} = \arccos \left(\frac{50.348}{\sqrt{53.587} \sqrt{160.76}} \right) \frac{180}{\pi} = 57^\circ$$

4 Conclusion

Nous avons montré les représentations contravariante et covariante du fonctionnement de circuits électromagnétiques. La base modale associée aux mailles conduit à une expression compacte et élégante du problème. Le fait d'avoir des opérateurs non linéaires comme propriétés des branches du circuit n'est pas un obstacle à sa géométrisation. Les variations de ces opérateurs en fonction des valeurs des courants apparaissent comme des glissements du plan de fonctionnement sur une hypersurface dont les courbures peuvent révéler son comportement au global. Nous espérons par cet article, contribuer à aider à la compréhension de cette géométrisation pour les non initiés, et contribuer à la diffusion de la technique de l'analyse tensorielle des réseaux, pour laquelle de nombreuses potentialités restent sans aucun doute à découvrir dans le cadre de l'étude des sûretés de fonctionnement des circuits. Mais plus généralement, ces approches peuvent aider à modéliser des systèmes complexes dont les équations multiphysiques peuvent être établies dans le même formalisme. Les courbures révèlent des dépendances évoluant en fonction de paramètres. L'analyse de ces dépendances permet de comprendre le comportement non linéaire du système, ce qui est essentiel pour éviter ces régions de fonctionnement souvent difficiles à contrôler.

References

- [1] G.Korenev. Le calcul tensoriel. (1995). Edition MPTI, Moscou.
- [2] G.Kron. Tensor analysis of networks. New York, 1965.
- [3] O.Maurice. Pistes pour l'application de la notion de variété aux espaces de Kron, et la justification de la pertinence d'emploi du concept de tenseurs par Kron. Document rapport de réflexions en cours sur le sujet menées par l'auteur. 2014. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01077631>
- [4] O.Maurice. Second geometrization: cases study. 2014. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01098337>
- [5] O.Maurice. Kron's formalism as best candidate for a second geometrization. 2014. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01079386>